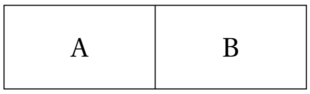
Histoires de maths
Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est une méthode probabiliste permettant d'estimer certains paramètres à l'aide de simulations. Utilisons la dans un cas simple pour comprendre comment elle peut nous aider à estimer la surface d'une figure géométrique.

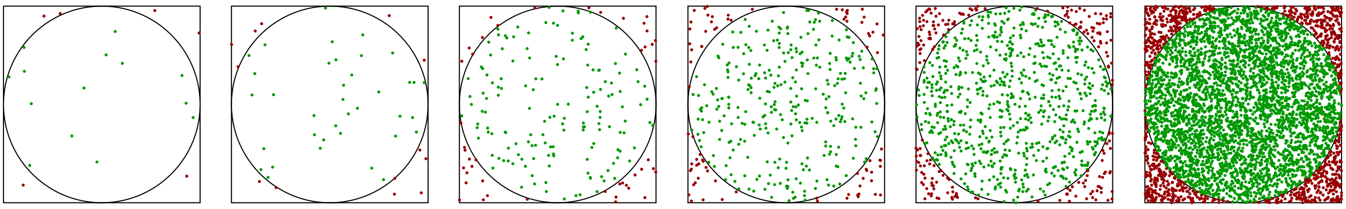
Aire et probabilité



Considérons le rectangle ci-contre. Il est partagé en deux parties égales A et B.
La probabilité qu'un point placé au hasard dans ce rectangle appartienne à la zone A est donc $p = \frac{1}{2}$ (une chance sur deux).
Cela traduit simplement le fait que l'aire de A est la moitié de l'aire du rectangle. On a ainsi la relation $\mathscr{A}_{\text{ire}}(\text{A}) = \frac{1}{2} \times \mathscr{A}_{\text{ire}}(\text{rectangle})$ qui s'écrit aussi $\mathscr{A}_{\text{ire}}(\text{A}) = p \times \mathscr{A}_{\text{ire}}(\text{rectangle})$.
On peut maintenant raisonner dans l'autre sens : si je connais p et l'aire du rectangle, je peux trouver l'aire de A.
Mais comment déterminer p ? Rien de plus simple si l'on se souvient qu'une probabilité n'est rien d'autre qu'une « fréquence limite »...

Estimation de π

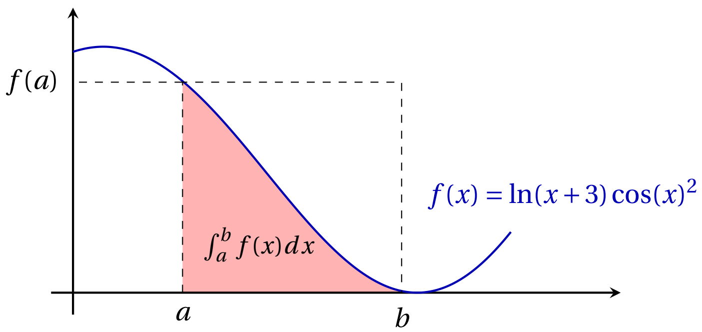
On veut estimer π qui est l'aire d'un disque de rayon 1. On inscrit ce disque dans un carré de côté 2, donc d'aire 4. D'après le paragraphe précédent, on a l'égalité $\pi = p \times 4$ où p est la probabilité qu'un point placé au hasard dans le carré soit à l'intérieur du disque.
Il ne nous reste plus qu'à estimer p. Pour cela, on peut effectuer une simulation à l'aide d'un tableur par exemple.
On effectue n fois l'expérience aléatoire suivante : tirer un point au hasard dans le carré, vérifier s'il est dans le cercle. La fréquence des points appartenant au disque tend vers p lorsque le nombre de lancers tend vers $+\infty$.
Voici quelques simulations pour mieux visualiser le procédé :



Lancers : 20	Lancers : 50	Lancers : 200	Lancers : 400	Lancers : 1000	Lancers : 5000
Dans cercle : 14	Dans cercle : 37	Dans cercle : 155	Dans cercle : 318	Dans cercle : 784	Dans cercle : 3957
$\pi \simeq 2.79999$	$\pi \simeq 2.95996$	$\pi \simeq 3.09998$	$\pi \simeq 3.18$	$\pi \simeq 3.13599$	$\pi \simeq 3.16559$

On remarque qu'il faut faire beaucoup de lancers pour obtenir une estimation viable de π.

Estimation d'une intégrale



On peut, par le même procédé, estimer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle, c'est-à dire l'aire sous la courbe de la fonction sur cet intervalle.

Cela ramène le calcul parfois difficile ou impossible d'une primitive à l'étude d'une inéquation pour savoir si un point tiré au hasard dans le rectangle est bien sous la courbe.

Comme souvent en mathématiques, on déplace une difficulté a priori insurmontable dans un champ où de nouveaux outils mathématiques nous permettent de l'affronter.